

Rappel: Limite d'une suite.

Déf Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \stackrel{\text{dét}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ex. Soit $p \in \mathbb{Q}, p > 0$. Considérons la suite $a_0 = 1, a_n = \frac{1}{n^p}, n \geq 1$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0.$$

$$|a_n - l| \leq \varepsilon$$

Dém: Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |\frac{1}{n^p} - 0| \leq \varepsilon \iff \frac{1}{n^p} \leq \varepsilon$

$$\iff \frac{1}{\varepsilon} \leq n^p \stackrel{p > 0}{\iff} \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \leq n \quad (\text{voir Exercice: Si } 0 < x \leq y \Rightarrow x^m \leq y^m \text{ et } x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{Si on choisit } n_0 = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p}}} \iff$$

$$\iff \frac{1}{n} < \varepsilon^{\frac{1}{p}} \stackrel{p > 0}{\iff} \frac{1}{n^p} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow \text{par la définition de la limite, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad p > 0$$

$$|a_n - 0| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \forall p > 0}$$

En fait, la limite est zéro pour tout $p > 0$ réel.

Exercice $\forall x, y \in \mathbb{R} : 0 < x \leq y \Rightarrow x^m \leq y^m$ et $x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$

Dém: (1) Soient $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} : 0 < x_1 \leq y_1, 0 < x_2 \leq y_2$ Alors $y_1 - x_1 \geq 0, x_2 > 0 \Rightarrow y_1 x_2 - x_1 x_2 \geq 0$

Aussi, $y_2 - x_2 \geq 0$ et $y_1 > 0 \Rightarrow y_1 y_2 - x_2 y_1 \geq 0$. Alors $y_1 y_2 \geq x_2 y_1 \geq x_1 x_2$ (Si $0 < x_1 < y_1$ et $0 < x_2 < y_2$ (axiome de $\mathbb{R}$) $\Rightarrow y_1 y_2 > x_1 x_2$).
(2) Si $0 < x \leq y \Rightarrow x^m \leq y^m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$ par récurrence : $m=1$ $x \leq y$ **Vrai**.

Supposition: $x^n \leq y^n$. Alors par (1), puisque $x \leq y \Rightarrow x^{n+1} \leq y^{n+1}$ **Vrai** $\Rightarrow$ par récurrence $x^m \leq y^m \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$.

(3) Si $0 < x \leq y \Rightarrow x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}}$. Par contraposée: Si $y^{\frac{1}{m}} < x^{\frac{1}{m}} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} (y^{\frac{1}{m}})^m < (x^{\frac{1}{m}})^m \Leftrightarrow y < x$, contradiction.
 $\Rightarrow x^{\frac{1}{m}} \leq y^{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$ $\square$

Proposition (unicité de la limite).

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et supposons que $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ sont des limites de (a_n) . Alors $a = b$.

Dém: Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

aussi, puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \Rightarrow \exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_0, |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

Donc $\forall n \geq \max(n_0, m_0) \Rightarrow |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow |a - b| \leq \varepsilon \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$ $\square$
inégalité triangulaire

Inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Dém: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a: $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$; $y \leq |y|$ et $-y \leq |y|$

Alors si $x + y \geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y \leq |x| + |y|$; Si $x + y < 0 \Rightarrow |x + y| = -x - y \leq |x| + |y|$ $\square$

Ex. $a_n = (-1)^n$ est divergente.

Par absurde: Supposons qu'il existe la limite $l \in \mathbb{R}$ de $(-1)^n$

$$\text{Soit } \varepsilon = \frac{1}{4} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - l| \leq \frac{1}{4}$$

$$a_{2k} = 1, \quad a_{2k+1} = -1 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall k: 2k \geq n_0, 2k+1 \geq n_0, \text{ on a:}$$

$$|a_{2k} - l| = |1 - l| \leq \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad |a_{2k+1} - l| = |-1 - l| \leq \frac{1}{4}$$

$$\underline{2} = |l - 1 + (-1 - l)| \stackrel{\Delta}{\leq} |l - 1| + |-1 - l| \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\frac{1}{2}} \quad \text{absurde} \Rightarrow a_n = (-1)^n \text{ est divergente} \quad \square$$

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

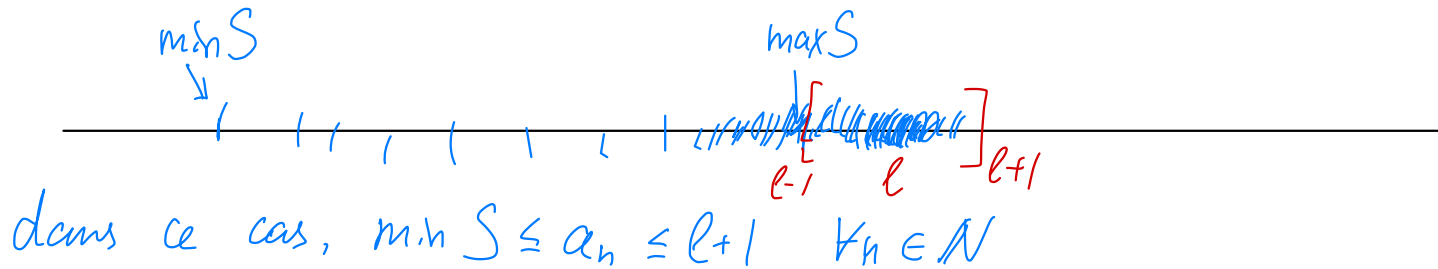
Dém: Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, |a_n - l| \leq 1$.

$$\Leftrightarrow l - 1 \leq a_n \leq l + 1 \quad \forall n \geq n_0$$

Soit $S = \{a_0, a_1, \dots, a_{n_0-1}\}$ ensemble fini $\Rightarrow \exists \max S, \min S$

$\Rightarrow$ la suite (a_n) est bornée par $\min(\min S, l-1)$ et $\max(\max S, l+1)$. $\square$

Ex



La réciproque de la Proposition est fausse: $(-1)^n = a_n$ est bornée mais divergente

§2.3. Opérations algébriques sur les limites.

Proposition Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Alors:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{a}{b} \quad \text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$$

} voir [DZ §2.33]

Remarques. (1) Si $(a_n + b_n)$ convergente $\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) convergentes,
soit (a_n) et (b_n) divergentes : Ex: $a_n = n$, $b_n = -n \Rightarrow a_n + b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si (b_n) converge et $(a_n + b_n)$ converge $\Rightarrow$ alors a_n converge.

$$a_n = \underbrace{(a_n + b_n)}_{\text{conv}} - \underbrace{b_n}_{\text{conv}} \quad \text{converge par Prop (1).}$$

(2) Cas particulier: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0 \Rightarrow$ Soit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$,
soit les suites (a_n) et (b_n) sont divergentes.

$$a_n = n + \frac{1}{n+1} \quad b_n = n \Rightarrow a_n - b_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$a_n - b_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

(3) $\forall p \in \mathbb{R}$, si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} p a_n = p a$.

Supposons $p > 0$. Pour $\frac{\varepsilon}{p} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{p} \Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{p} \leq a_n - a \leq \frac{\varepsilon}{p} \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow -\varepsilon \leq p a_n - p a \leq \varepsilon \Leftrightarrow |p a_n - p a| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p a_n = p a$.

(4) Soit $(a_n \cdot b_n)$ convergente.

$\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) convergents : $a_n = \frac{1}{n+1}$, $b_n = \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n b_n = \frac{1}{(n+1)^2}$

$\Rightarrow$ Soit (a_n) et (b_n) divergents : $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \Rightarrow a_n b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n+1}$
convergente.

$\Rightarrow$ Soit une conv, une div : $a_n = \underset{\text{div}}{(n+1)}$, $b_n = \underset{\text{conv.}}{\frac{1}{n+1}} \Rightarrow a_n b_n = 1$ convergente.

Mais si $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$, Alors (a_n) est convergente.

$a_n = \frac{a_n \cdot b_n}{b_n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0 \Rightarrow$ par Proposition (3), (a_n) converge
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$

(5) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, alors la suite $(\frac{1}{a_n})$ est divergente, si elle existe.

Dém: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |a_n - 0| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| \leq \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{a_n}| \geq \frac{1}{\varepsilon}$

Soit $M > 0$. On choisit $\varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow \forall n \geq n_0, |\frac{1}{a_n}| \geq \frac{1}{\varepsilon} = M \Rightarrow$

$\Rightarrow (\frac{1}{a_n})$ n'est pas bornée $\Rightarrow$ divergente. □

Proposition. Quotient de deux suites polynomiales.

-61-

$$X_n = a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_p \neq 0, \quad p, q \in \mathbb{N}^*$$

$$Y_n = b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad b_q \neq 0.$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{X_n}{Y_n} \right) = \begin{cases} 0, & \text{si } p < q \\ \frac{a_p}{b_q}, & \text{si } p = q \\ \text{divergente}, & \text{si } p > q \end{cases}$$

Dém:

$$\frac{X_n}{Y_n} = \frac{a_p n^p + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \dots + b_1 n + b_0} = \frac{n^p \left(a_p + a_{p-1} \frac{1}{n} + \dots + \frac{a_0}{n^p} \right)}{n^q \left(b_q + b_{q-1} \frac{1}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^q} \right)} = \frac{n^p}{n^q} \frac{u_n}{v_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_p + a_{p-1} \frac{1}{n} + \dots + a_0 \frac{1}{n^p}}{b_q + b_{q-1} \frac{1}{n} + \dots + b_0 \frac{1}{n^q}} = \frac{a_p}{b_q} \neq 0 \text{ parce que } a_p \neq 0$$

$$\text{Si } p < q \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^q} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{q-p}} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^q} \cdot \frac{u_n}{v_n} = 0$$

$$\text{Si } p = q \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n^p} \cdot \frac{u_n}{v_n} = \frac{a_p}{b_q}$$

$$\text{Si } p > q \Rightarrow (n^{p-q}) \text{ est divergente puisque } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p-q}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X_n}{Y_n} = n^{p-q} \frac{u_n}{v_n} \Rightarrow \text{divergente, n'est pas bornée.}$$



Ex. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{85n^2 + 5n + 2}{2n^3 + n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^3} \frac{85 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{7}{n^3}} = 0$

$\underbrace{\frac{n^2}{n^3}}_{=\frac{1}{n} \rightarrow 0} \quad \underbrace{\frac{85 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{7}{n^3}}}_{\rightarrow 0} = 0$

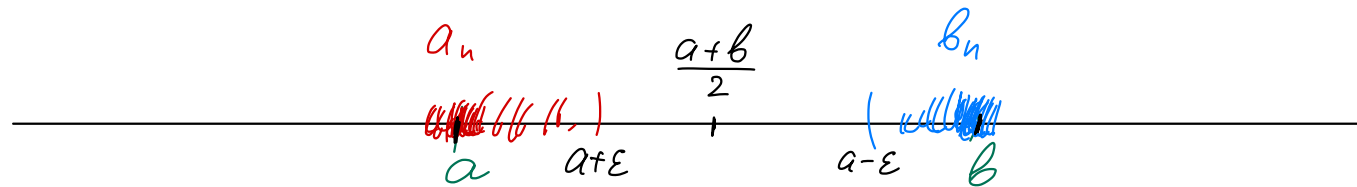
§ 2.4. Relation d'ordre.

Proposition Soient (a_n) et (b_n) deux suites convergentes $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$.

Supposons que $\exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq m_0 \Rightarrow a_n \geq b_n$. Alors $a \geq b$.

Dém: Par contraposée. Supposons que $b > a$. Soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon = \frac{b-a}{4}$.

$$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon \text{ et } b - \varepsilon \leq b_n \leq b + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$$



$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{4} < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = b - \frac{b-a}{2} < b - \frac{b-a}{4} = b - \varepsilon \leq b_n \quad \forall n \geq n_0.$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, a_n < b_n.$$

Alors pour tout $n \geq \max(n_0, m_0)$ on a : $a_n < b_n$, contradiction
avec la condition $\forall n \geq m_0 \Rightarrow a_n \geq b_n$. □

Théorème de deux gendarmes pour les suites

Soient (a_n) , (b_n) , (c_n) trois suites telles que

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$$

$$(2) \exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k \Rightarrow a_n \leq b_n \leq c_n$$

Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$.

Dém. Soit $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$, on a :

$$-\varepsilon \leq a_n - l \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon \leq c_n - l \leq \varepsilon$$

$$\forall n \geq k \Rightarrow a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l$$

$$\forall n \geq \max(n_0, k) \Rightarrow -\varepsilon \leq a_n - l \leq b_n - l \leq c_n - l \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow -\varepsilon \leq b_n - l \leq \varepsilon \quad \forall n \geq \max(n_0, k)$$

$\Rightarrow$ par la définition, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$ 



l